Bihar Mathematical Society

TSTM (Olympiad) 2021 (Class-12)

Full Marks:- 100 **Time: $2\frac{1}{2}$ Hours**

Answer all questions. All questions carry equal marks.

1. Let x be a positive integer and define f(n)=$1!+2!+\cdots+n!$. Find polynomial $P(x)$ and $Q(x)$ such that $f(n+2)=Q(n)\cdot f(n)+P(n)f(n+1)$ for all $n\geq 1$

मान लिया कि x एक धणात्मक पूर्णां संख्या है $f(n)=1!+2!+\cdots+n!$ परिभाषित है। यदि $f(n+2)=Q(n)\cdot f(n)+P(n)f(n+1)$, $n\geq 1$ हो तो बहुपद $P(x)$और $Q(x)$ मान निकालें।

(a) $P(x)=x+1,\ \ Q(x)=x-1$
(b) $P(x)=x-1,\ \ Q(x)=x+1$
(c) $P(x)=-x-2,\ \ Q(x)=x+3$
(d) $P(x)=x+3,\ \ Q(x)=-x-2$

2. If $f(x)$ is defined as $f:(-1,1)\to R$ and is differentiable on $(-1,1)$. It is given that

$f'(0)=\lim_{n\to\infty} n(f\left(\frac{1}{n}\right))$ and $f(0)=0$

Find the value of $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}(n+1)\cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)-n\right)$, given that $\left|\cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leq\frac{\pi}{2}$

यदि फलन $f(x)$ *परिभाषित* $f:(-1,1)\to R$ *है तथा* $(-1,1)$ *पर अवकलन है।* *यदि* $f'(0)=\lim_{n\to\infty} n(f\left(\frac{1}{n}\right))$ *और* $f(0)=0$ *है और* $\left|\cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)\right|\leq\frac{\pi}{2}$ *तो*

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{\pi}(n+1)\cos^{-1}\left(\frac{1}{n}\right)-n\right)$ *का मान ज्ञात करें।*

(a) $\frac{1}{\pi}$ (b) $1-\frac{1}{\pi}$ (c) $1-\frac{2}{\pi}$ (d) $\frac{3}{\pi}-1$

3. Let $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall\ x,y\ \epsilon\ R.\ If\ f'(0)$ exists and equal –1 and $f(0)=1,$ then find $f(2)$.

मान लिया $f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$, $\forall\ x,y\ \epsilon\ R$, यदि $f'(0)$ परिभाषित तथा इसका मान –1 और $f(0)=1$ तो $f(2)$ का मान ज्ञात करें?

(a) –1 (b) 1 (c) 0 (d) e

4. $\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$ equals

$\int_0^1\frac{x^4(1-x)^4}{1+x^2}dx$ बराबर है

(a) 4π (b) $\frac{4\pi}{5}$ (c) $\frac{22}{7}-\pi$ (d) $\pi-\frac{22}{7}$

5. If $g(x) = \begin{cases} [f(x)], & x\epsilon \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$

Where [·] denotes the greatest integer function and

$f(x) = \frac{2(sinx - sin^n x) + |(sinx - sin^n x)|}{2(sinx - sin^n x) - |(sinx - sin^n x)|}$, $n\epsilon R$ then

यदि $g(x) = \begin{cases} [f(x)], & x\epsilon \left(0,\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2},\pi\right) \\ 3, & x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ जहाँ [·] अधिकतम पूर्णांक फलन हैं और

$f(x) = \frac{2(sinx - sin^n x) + |(sinx - sin^n x)|}{2(sinx - sin^n x) - |(sinx - sin^n x)|}$, $n\epsilon R$ तो

(a) $g(x)$ is continuous and differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$ when $0 < n < 1$

$g(x)$ सतत और अवकलन $x = \frac{\pi}{2}$ जहाँ $0 < n < 1$ है

(b) $g(x)$ is continuous and differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$ when $n > 1$

$g(x)$ सतत और अवकलन $x = \frac{\pi}{2}$ जहाँ $n > 1$ है

(c) $g(x)$ is continuous but not differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$ when $0 < n < 1$

$g(x)$ सतत है पर अवकलन $x = \frac{\pi}{2}$ जहाँ $0 < n < 1$ नहीं

(d) $g(x)$ is continuous and not differentiable at $x = \frac{\pi}{2}$ when $n > 1$

$g(x)$ सतत है और अवकलन $x = \frac{\pi}{2}$ पर नहीं है जहाँ $n > 1$

6. Let $\int \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(f(x)+g(x)\sqrt{f(x)\cdot g(x) - g^2(x)}} dx = \sqrt{m}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{f(x)-g(x)}{ng(x)}}\right) + c$

Where $m, n\,\epsilon N$ and c is constant of integration $(g(x) > 0)$. $Then$ the value of $\left(m^2 + n^2\right)$ is

यदि $\int \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(f(x)+g(x)\sqrt{f(x)\cdot g(x) - g^2(x)}} dx = \sqrt{m}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{f(x)-g(x)}{ng(x)}}\right) + c$

जहाँ $m, n\,\epsilon\, N$ और ब स्थिरांक एवं समाकलन $(g(x) > 0)$ हो तो $\left(m^2 + n^2\right)$ मान है–

(a) 6 (b) 8 (c) 10 (d) 12

7. Find a function g: $R \to R$, continuous in $[0, \infty)$ and positive in $(0, \infty)$ satisfying $g(1) = 1$ and $\frac{1}{2}\int_0^x g^2(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2$.

यदि $g: R \to R$ सतत $[0, \infty)$ और धनात्मक $(0, \infty)$ को $g(1) = 1$ तथा $\frac{1}{2}\int_0^x g^2(t)dt = \frac{1}{x}\left(\int_0^x g(t)dt\right)^2$ को संतुष्ट करता हो तो फलन का मान ज्ञात करें ?

(a) $g(x) = x^{2+\sqrt{2}}$

(b) $g(x) = x^{1+\sqrt{2}}$

(c) $g(x) = x + x^{2+\sqrt{2}}$

(d) $g(x) = x + x^{1+\sqrt{2}}$

8. If $f(x) = sinx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(sinx + tcosx)f(t)dt,$ then $f(x)$ may be equal to $\left(\frac{-1}{k}sinx - \frac{2}{k}cosx\right)$, *where k is a numerical* quality which equal to

यदि $f(x) = sinx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(sinx + tcosx)f(t)dt,$ तब $f(x)$ का मान $\left(\frac{-1}{k}sinx - \frac{2}{k}cosx\right)$ के बराबर हो तो k मान होगा।

(a) 0 (b) 1 (c) 2 (d) 3

9. Consider two lines $L_1: x - y = 0$ and $L_2: x + y = 0$ and a moving point $P(x, y)$. Let $d(P, L_i);\ i = 1,2$ represents the distance of a point $'P'$ from the line L_i. If the point 'P' moves in certain region $'R'$ such that $2 \leq d(P, L_1) + d(P, L_2) \leq 4$. Find the area of the region R

मान लिया कि दो समीकरण $L_1: x - y = 0$ तथा $L_2: x + y = 0$ है और $P(x, y)$ बिन्दु के साथ घुम रहा है।

यदि $d(P, L_i);\ i = 1,2$ है और रेखा L_i से बिन्दु P की दूरी रेखांकित करता है। यदि बिन्दु P निश्चित क्षेत्र R में इस प्रकार घुमता हो कि $2 \leq d(P, L_1) + d(P, L_2) \leq 4$ है तो क्षेत्र R का क्षेत्रफल ज्ञात करे?

(a) 6 (b) 12 (c) 24 (d) 48

10. Let $f(x) = min\left\{tanx,\ cotx, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\forall\, x\epsilon[0, \frac{\pi}{2}]$. Then area bounded by $y = f(x)$ and x-axis is

मान लिया कि $f(x) = min\left\{tanx,\ cotx, \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$, $\forall\, x\epsilon[0, \frac{\pi}{2}]$ हो तो $y = f(x)$ और x–अक्ष के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात करें?

(a) $\log_e\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

(b) $\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

(c) $\log_e\left(\frac{4}{3}\right) + \frac{\pi}{12\sqrt{3}}$

(d) $\log_e\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

11. If the area enclosed by the curves $y = sin^{-1}|sinx|$ and $y = (sin^{-1}|sinx|^2)$, where $0 \leq x \leq 2\pi$, is $\frac{a\pi^3 - b\pi^2 + c}{d}$ where $a, b, c, d\epsilon N$ then the value of $a + d - b - c)$ is equal to

यदि दो वक्र $y = sin^{-1}|sinx|$ और $y = (sin^{-1}|sinx|^2)$ के बीच का क्षेत्रफल $\frac{a\pi^3 - b\pi^2 + c}{d}$ जहाँ $0 \leq x \leq 2\pi$ और $a, b, c, d\ \epsilon\ N$ हो तो $a + d - b - c$ का मान है–

(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15

12. If the velocity of flow of water through a small hole is $0.6\sqrt{2gy}$, where g is the gravitational acceleration and y is the height of water level from the hole. Find the time required to empty a tank having the shape of a right circular cone of base radius a and height h filled completely with water and having a hole area A_0 in the base.

यदि एक छोटे से छेद के माध्यम से पानी के प्रवाह का वेग $0.6\sqrt{2gy}$ है, जहां g गुरुत्वाकर्षण त्वरण है और y छिद्र से जल स्तर की ऊंचाई है। आधार त्रिज्या a और ऊंचाई h के समकोण गोलाकार शंकु के आकार वाले टैंक को खाली करने के लिए आवश्यक समय को ज्ञात करें यदि टैंक पूरी तरह से पानी से भरा हुआ हो और आधार का क्षेत्र A_0 हो।

(a) $0.1\frac{\pi a^2 h}{A_0}$ (b) $0.2\frac{\pi a^2 h}{A_0}$ (c) $0.2\frac{\pi a^2 \sqrt{h}}{A_0}$ (d) $0.1\frac{\pi a^2 \sqrt{h}}{A_0}$

13. For what value of a does equation $\frac{acosx}{2cos2x-1} = \frac{a+sinx}{(cos^2x-3sin^2x)tanx}$ possess solution?

a के किस मान के लिए समीकरण $\frac{acosx}{2cos2x-1} = \frac{a+sinx}{(cos^2x-3sin^2x)tanx}$ का हल रखता है?

(a) $a\epsilon\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$

(b) $a\epsilon\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)-\{-1\}$

(c) $a\epsilon\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)-\left\{1,\ \frac{1}{3}\right\}$

(d) $a\epsilon\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)-\left\{-1,\ \frac{1}{3}\right\}$

14. Obtain the integral values of p for which the following system of equations possesses real solutions: $\cos^{-1}x + (\sin^{-1}y)^2 = \frac{p\pi^2}{4}$ and $\cos^{-1}x\,(\sin^{-1}y)^2 = \frac{\pi^2}{16}$. The solution is

p का मान ज्ञात करे यदि $\cos^{-1}x + (\sin^{-1}y)^2 = \frac{p\pi^2}{4}$ तथा $\cos^{-1}x\,(\sin^{-1}y)^2 = \frac{\pi^2}{16}$ वास्तविक समीकरण है तो हल निकाले?

(a) $p = 1, x = cos\frac{\pi^2}{4}$ and $y = \pm 1$

(b) $p = 2, x = cos\frac{\pi}{4}$ and $y = \pm 1$

(c) $p = 1, x = cos\frac{\pi}{4}$ and $y = \pm 1$

(d) $p = 2, x = cos\frac{\pi^2}{4}$ and $y = \pm 1$

15. Find the value of a for which the inequality $3 - |x - a| > x^2$ is satisfied by at least one negative x.

a के किस मान के लए असमीकरण $3 - |x - a| > x^2$ को x का कम से कम एक ऋणात्मक मान x को संतुष्ट करता है

(a) $\left(-\frac{13}{4},3\right)$ (b) $\left(-\frac{13}{4},2\right)$ (c) $\left(-\frac{13}{2},2\right)$ (d) $\left(-\frac{13}{2},2\right)$

16. There are two sets of parallel lines, their equations being $x\,cos\alpha + y\,sin\alpha = p; p = 1,2,3, \ldots m$ and $y\,cos\alpha - x\,sin\alpha = q\,; q = 1,2,3 \ldots n(n > m)$ where α is a given constant. The no. of squares formed by the lines is

दो सामानान्तर रेखाओं के समुच्चय $x\,cos\alpha + y\,sin\alpha = p,\ p = 1,2,3, \ldots n$ और $y\,cos\alpha - x\,sin\alpha = q\,; q = 1,2,3 \ldots n(n > m)$ है जहाँ α एक स्थिरांक दिया हुआ है। रेखा के द्वारा बनाए कितने वर्ग है–

(a) $\frac{1}{6}n(n-1)(3n-m-1)$

(b) $\frac{1}{6}m(n-1)(3m-n-1)$

(c) $\frac{1}{6}m(m-1)(3n-m-1)$

(d) $\frac{1}{6}m(m-1)(3m-n-1)$

17. If $n \in N$ and $n > 1$, then find the digit at unit place is the number

यदि $n \in N$ और $n > 1$ तो इकाई स्थान पर आने वाले अंक निकाले?

$$\sum_{r=0}^{100} r! + 2^{2^n}$$

(a) 0 (b) 2 (c) 4 (d) 8

18. Let S be the sum of all possible determinants of order 2 having 0, 1, 2 and 3 as their elements. Then find the common root α of the equations

$$x^2 + ax + [m+1] = 0$$

$$x^2 + bx + [m+4] = 0$$

$$x^2 - cx + [m+15] = 0$$

Such that α>S, where $a+b+c=0$ and $m = \lim_{n\to\infty} \sum_{r=1}^{2n} \frac{r}{\sqrt{n^2-r^2}}$ where $[x] \le x$

(a) $\alpha = 1$ (b) $\alpha = 2$ (c) $\alpha = 3$ (d) $\alpha = 4$

19. If $x, y, z > 0$, the value of $(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right]$ will be

यदि $x, y, z > 0$, हो तो $(xy+yz+zx)\left[\frac{1}{(x+y)^2} + \frac{1}{(y+z)^2} + \frac{1}{(z+x)^2}\right]$ का मान होगा?

(a) greater than or equal to $\frac{9}{2}$ ($\frac{9}{2}$ से बड़ा और बराबर)

(b) less than or equal to $\frac{9}{4}$ ($\frac{9}{4}$ से छोटा और बराबर)

(c) greater than or equal to $\frac{9}{4}$ ($\frac{9}{4}$ से बड़ा और बराबर)

(d) less than or equal to $\frac{9}{2}$ ($\frac{9}{2}$ से छोटा और बराबर)

20. Two sides of a triangle have the joint equation

$x^2 - 2xy - 3y^2 + 8y - 4 = 0.$

The third side, which is variable, always passes through the point $(-5, -1)$. Find the range of values of the slope of the third side, so that the origin is an interior point of the triangle.

किसी त्रिभुज के दो भुजाओं का समीकरण $x^2 - 2xy - 3y^2 + 8y - 4 = 0$, है तथा तीसरी भुजा बिन्दु $(-5, -1)$ से गुजरती है। तो तीसरी भुजा के ढ़ाल का परास ज्ञात करें यदि उसे मूलबिन्दु त्रिभुज के अन्दर हो?

(a) $\left(\frac{1}{5}, 1\right)$ (b) $\left(-1, \frac{1}{5}\right)$ (c) $(-1, 1)$ (d) $\left(1, \frac{7}{5}\right)$